дезической $\mathcal{M}_2$ (плоскому центральному сечению). В то же время образующая поднимается по прямой пропорционально изменению эквицентроаффинной дуги $S_{эц}$ плоского центрального сечения $\mathcal{M}_2$ ($S_{эц} = \kappa \int (x^1 f^1 - f) dx^1, \kappa = const$).

Рассмотрим, наконец, индикатрису $\mathcal{M}_2$, являющуюся поверхностью касательных к W-кривой центроаффинной группы.

Л е м м а 8. В общем случае группа движений в $T(\mathcal{M}_2)$ зависит от трех параметров. Если же центроаффинное кручение W-кривой равно нулю, то эта группа зависит от четырех параметров.

Список литературы

1. Ш и р о к о в А.П. К вопросу о релятивной линейчатой геометрии.- В кн.: Дифференциальная геометрия. Саратов, 1976.

2. Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности. М. Наука, 1976.

3. Широков П.А., Широков А.П. Аффинная дифференциальная геометрия. М., Физматгиз, 1959.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.13 1982

А.В. С т о л я р о в

ДВОЙСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ ГИПЕРПОЛОСНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения $\mathcal{H} \subset P_n$ m-мерных линейных элементов ($m < n-1$) автором изучалась в работе [7]. В настоящей статье геометрия указанного многообразия в n-мерном пространстве проективной связности $P_{n,n}$ строится с привлечением теории двойственности, что позволило вскрыть новые аспекты теории указанного многообразия и привело к ее обогащению новыми геометрическими фактами; найдены также некоторые приложения двойственной теории распределения $\mathcal{H} \subset P_{n,n}$.

На протяжении всего изложения индексы пробегают следующие значения:

$$\bar{\mathcal{J}}, \bar{\mathcal{K}}, \bar{\mathcal{L}} = \overline{0, n}; \quad \mathcal{J}, \mathcal{K}, \mathcal{L}, \mathcal{P}, Q = \overline{1, n};$$

$$i, j, k, \ell, s, t = \overline{1, m}; \quad u, v, w = \overline{m+1, n-1}; \quad \alpha, \beta, \gamma, = \overline{m+1, n};$$

$$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k} = \overline{0, m}; \quad \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} = 0, m+1, \ldots, n-1.$$

2. Рассмотрим классическое n-мерное пространство проективной связности $P_{n,n}$, определенное Э. Картаном [2], [11] с помощью $(n+1)^2$ форм Пфаффа $\omega_{\bar{\mathcal{J}}}^{\bar{\mathcal{K}}}$, подчиненных структурным уравнениям

$$\mathcal{D}\omega_{\bar{\mathcal{J}}}^{\bar{\mathcal{K}}} = \omega_{\bar{\mathcal{J}}}^{\bar{\mathcal{L}}} \wedge \omega_{\bar{\mathcal{L}}}^{\bar{\mathcal{K}}} + \frac{1}{2} R_{\bar{\mathcal{J}}PQ}^{\bar{\mathcal{K}}} \omega_0^P \wedge \omega_0^Q, \quad \omega_{\bar{\mathcal{L}}}^{\bar{\mathcal{L}}} = 0. \quad (1)$$

При этом независимые первые интегралы $u^1, u^2, \ldots, u^n$ вполне интегрируемой системы линейно независимых уравнений $\omega_0^{\mathcal{J}} = 0$ являются локальными координатами точки $A(u)$ базы

B_n; с текущей точкой $A(u)$ связывается n-мерное проективное пространство P_n, отнесенное к точечному реперу $\{A_{\bar{J}}(u)\}$, причем $A_0(u) \equiv A(u)$.

Система дифференциальных уравнений движения репера $\{A_{\bar{J}}\}$ в слое имеет вид:

$$\delta A_{\bar{J}} = \pi^{\bar{K}}_{\bar{J}} A_{\bar{K}}, \quad \pi^{\bar{K}}_{\bar{J}} = \omega^{\bar{K}}_{\bar{J}}\big|_{\omega^L_0 = 0}$$

где δ -символ дифференцирования по параметрам центропроективной группы фиксированного слоя, т.е. при $\omega^{\mathcal{J}}_0 = 0$.

3. В пространстве проективной связности $P_{n,n}$ $(n>2)$ рассмотрим регулярное гиперполосное распределение H [7] m-мерных линейных элементов $(m<n-1)$; в репере первого порядка дифференциальные уравнения многообразия $H \subset P_{n,n}$ имеют вид (см. [7]):

$$\omega^n_i = \Lambda^n_{i\varkappa}\, \omega^{\varkappa}_0, \quad \omega^v_i = M^v_{i\varkappa}\, \omega^{\varkappa}_0,$$
$$\omega^n_v = A^n_{v\alpha}\, \omega^{\alpha}_0, \quad \omega^i_v = N^i_{v\varkappa}\, \omega^{\varkappa}_0 \tag{2}$$

В силу регулярности распределения тензор Λ^n_{ij} первого порядка является невырожденным: $\Lambda = |\Lambda^n_{ij}| \neq 0$; ниже предполагаем, что тензор A^n_{uv} первого порядка также является невырожденным: $A = |A^n_{uv}| \neq 0$ (геометрический смысл этого см. в [7]). Каждая из функций Λ и A является относительным инвариантом первого порядка:

$$d\ln\Lambda + m(\omega^0_0 + \omega^n_n) - 2\omega^i_i = \Lambda_{\varkappa}\, \omega^{\varkappa}_0,$$

$$d\ln A + (n-m-1)(\omega^0_0 + \omega^n_n) - 2\omega^v_v = A_{\varkappa}\, \omega^{\varkappa}_0,$$

где $\Lambda_{\varkappa} = \Lambda^{ji}_n \Lambda^n_{ij\varkappa}$, $\quad A_{\varkappa} = A^{vu}_n A^n_{uv\varkappa}$.

Продолжая уравнения системы (2), имеем поля фундаментальных геометрических объектов второго, третьего и т.д. порядков распределения $H \subset P_{n,n}$; в частности, каждая из систем функций $\{\Lambda^n_{ij\varkappa}, \Lambda^n_{i\varkappa}, A^n_{v\alpha}\}$, $\{A^n_{uv\varkappa}, A^n_{u\alpha}, \Lambda^n_{i\varkappa}\}$ образует геометрический объект второго порядка.

4. Возьмем новую систему из $(n+1)^2$ форм Пфаффа $\bar{\omega}^{\bar{K}}_{\bar{J}}$:

$$\bar{\omega}^0_0 = \omega^0_0 - \frac{1}{n+1}(\Lambda_{\varkappa} + A_{\varkappa})\omega^{\varkappa}_0, \quad \bar{\omega}^n_n = \omega^n_n - \frac{1}{n+1}(\Lambda_{\varkappa} + A_{\varkappa})\omega^{\varkappa}_0,$$

$$\bar{\omega}^i_0 = \omega^i_0 + \Lambda^{ij}_n \Lambda^n_{j\alpha}\omega^{\alpha}_0, \quad \bar{\omega}^v_0 = \omega^v_0 + A^n_{un} A^{vu}_n \omega^n_0, \quad \bar{\omega}^n_0 = \omega^n_0,$$

$$\bar{\omega}^0_i = \Lambda^n_{ki}\omega^k_n, \quad \bar{\omega}^v_i = -\Lambda^n_{ki} A^{vu}_n \omega^k_u, \quad \bar{\omega}^n_i = -\Lambda^n_{ki}\omega^k_0,$$

$$\bar{\omega}^0_n = \omega^0_n, \quad \bar{\omega}^i_n = -\Lambda^{ik}_n \omega^0_k, \quad \bar{\omega}^v_n = -A^{vu}_n \omega^0_u, \tag{3}$$

$$\bar{\omega}^j_i = \omega^j_i + (\Lambda^{js}_n \Lambda^n_{si\varkappa} - \delta^j_i \cdot \frac{1}{n+1}(\Lambda_{\varkappa} + A_{\varkappa})\omega^{\varkappa}_0,$$

$$\bar{\omega}^0_v = A^n_{uv}\omega^u_n, \quad \bar{\omega}^i_v = -A^n_{uv}\Lambda^{ik}_n \omega^u_k, \quad \bar{\omega}^n_v = -A^n_{uv}\omega^u_0,$$

$$\bar{\omega}^w_v = \omega^w_v + (A^{wu}_n A^n_{uv\varkappa} - \delta^w_v \cdot \frac{1}{n+1}(\Lambda_{\varkappa} + A_{\varkappa})\omega^{\varkappa}_0.$$

Формы $\bar{\omega}^{\bar{K}}_{\bar{J}}$ удовлетворяют следующим структурным уравнениям Картана-Лаптева [3], [7]:

$$\mathcal{D}\bar{\omega}^{\bar{K}}_{\bar{J}} = \bar{\omega}^{\bar{L}}_{\bar{J}} \wedge \bar{\omega}^{\bar{K}}_{\bar{L}} + \frac{1}{2}\bar{R}^{\bar{K}}_{\bar{J}PQ}\,\omega^P_0 \wedge \bar{\omega}^Q_0, \quad \bar{\omega}^{\bar{L}}_{\bar{L}} = 0; \tag{4}$$

следовательно, формы $\bar{\omega}^{\bar{K}}_{\bar{J}}$ являются формами связности нового пространства проективной связности $\bar{P}_{n,n}$. Нами показано, что преобразование $\mathcal{J}: \omega^{\bar{K}}_{\bar{J}} \to \bar{\omega}^{\bar{K}}_{\bar{J}}$ форм проективной связности по закону (3) является инволютивным, т.е. $\mathcal{J} \equiv \mathcal{J}^{-1}$.

Таким образом, регулярное гиперполосное распределение $\mathcal{H} \subset P_{n,n}$ m-мерных линейных элементов во 2-й дифференциальной окрестности его образующего элемента индуцирует пространство проективной связности $\bar{P}_{n,n}$, двойственное $P_{n,n}$ относительно инволютивного преобразования форм связности по закону (3); дифференциальные уравнения геометрического образа $\bar{\mathcal{H}} \subset \bar{P}_{n,n}$ двойственного данному распределению $\mathcal{H} \subset P_{n,n}$, имеют вид, аналогичный (2):

$$\bar{\omega}_i^n = \bar{\Lambda}_{i\varkappa}^n \, \bar{\omega}_0^\varkappa, \quad \bar{\omega}_i^v = \bar{M}_{i\varkappa}^v \, \bar{\omega}_0^\varkappa,$$

$$\bar{\omega}_v^n = \bar{A}_{v\alpha}^n \, \bar{\omega}_0^\alpha, \quad \bar{\omega}_v^i = \bar{N}_{v\varkappa}^i \, \bar{\omega}_0^\varkappa. \qquad (5)$$

З а м е ч а н и е. Справедливо: $R_{\bar{\jmath}pq}^{\bar{\varkappa}} = 0 \Leftrightarrow \bar{R}_{\bar{\jmath}pq}^{\bar{\varkappa}} = 0$, т.е. $\{P_{n,n} \equiv P_n\} \Leftrightarrow \{\bar{P}_{n,n} \equiv \bar{P}_n\}$; при этом формы $\omega_{\bar{\jmath}}^{\bar{\varkappa}}$ служат формами инфинитезимального перемещения точечного репера $\{A_{\bar{\jmath}}\}$, а формы $\bar{\omega}_{\bar{\jmath}}^{\bar{\varkappa}}$ —формами инфинитезимального перемещения тангенциального репера $\{\varepsilon_{\bar{\jmath}}\}$: $d\varepsilon_{\bar{\jmath}} = \bar{\omega}_{\bar{\jmath}}^{\bar{\varkappa}} \varepsilon_{\bar{\varkappa}}$, где

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{\sqrt[n+1]{\Lambda A}} [A_0 A_1 \dots A_{n-1}], \quad \varepsilon_n = \frac{1}{\sqrt[n+1]{\Lambda A}} [A_n A_1 \dots A_{n-1}],$$

$$\varepsilon_i = \frac{1}{\sqrt[n+1]{\Lambda A}} \sum_{j=1}^{m} \Lambda_{ji}^n [A_0 A_1 \dots A_{j-1} A_n A_{j+1} \dots A_m A_{m+1} \dots A_{n-1}], \qquad (6)$$

$$\varepsilon_v = \frac{1}{\sqrt[n+1]{\Lambda A}} \sum_{u=m+1}^{n-1} A_{uv}^n [A_0 A_1 \dots A_m A_{m+1} \dots A_{u-1} A_n A_{u+1} \dots A_{n-1}].$$

5. В работе [7] в третьей дифференциальной окрестности элемента распределения $\mathcal{H}$ найдено поле инвариантных соприкасающихся гиперквадрик, уравнения которых в репере первого порядка записываются в виде

$$2x^0 x^n = a_{ij}^n x^i x^j + \frac{2b_i}{m+2} x^i x^n + B_{uv}^n x^u x^v + 2b_v x^v x^n + T_n (x^n)^2; \qquad (7)$$

отметим, что гиперквадрики (7) найдены с существенным использованием фундаментального подобъекта $\{\Lambda_{ij}^n, \Lambda_{ijk}^n, \Lambda_{ijks}^n\}$ (с привлечением объектов $\{M_{ij}^v, \Lambda_{ij}^n\}$, $\{N_{vj}^i\}$).

Образ, двойственный соприкасающейся гиперквадрике (7), есть тангенциальная гиперквадрика, уравнение которой относительно репера $\{\varepsilon_{\bar{\jmath}}\}$ (см.(6)) записывается в виде:

$$2\bar{x}^0 \bar{x}^n = \bar{a}_{ij}^n \bar{x}^i \bar{x}^j + \frac{2\bar{b}_i}{m+2} \bar{x}^i \bar{x}^n + \bar{B}_{uv}^n \bar{x}^u \bar{x}^v + 2\bar{b}_v \bar{x}^v \bar{x}^n + \bar{T}_n (\bar{x}^n)^2. \qquad (8)$$

В уравнении (8) $\bar{x}^{\bar{\jmath}}$ представляют собой координаты гиперплоскостей ξ относительно тангенциального репера (6): $\xi = \bar{x}^{\bar{\jmath}} \varepsilon_{\bar{\jmath}}$; охваты функций $\bar{a}_{ij}^n, \bar{b}_i, \bar{B}_{uv}, \bar{b}_v, \bar{T}_n$ аналогичны соответствующим охватам коэффициентов уравнения (7) (см.[7]).

Показано, что при $\Lambda_{[ij]}^n = 0$ обращение в нуль тензора Дарбу $\mathcal{D}_{ijk}^n \overset{def}{=} (m+2) \Lambda_{ijk}^n - \Lambda_{(ij}^n b_{k)}$ (см.[7]) есть условие касания третьего порядка соприкасающихся гиперквадрик (7) и (8) с распределением $\mathcal{H} \subset P_{n,n}$ и $\bar{\mathcal{H}} \subset \bar{P}_{n,n}$ соответственно.

6. Согласно работе [8], на распределении $\mathcal{H} \subset P_{n,n}$, оснащенном в смысле А.П.Нордена [5] двойственным образом (в смысле [9]) полями квазитензоров ν_n^i, ν_i^0 , система форм $\{\overset{1}{\Theta}{}_j^i\}$, где

$$\overset{1}{\Theta}{}_0^i = \omega_0^i - \nu_n^i \omega_0^n,$$

$$\overset{1}{\Theta}{}_j^i = \omega_j^i - \nu_n^i \omega_j^n - \delta_j^i (\omega_0^0 - \overset{1}{\Theta}{}_0^k \nu_k^0) - N_{vj}^i \omega_0^v - \qquad (9)$$

$$- (\nu_{nj}^i - \Lambda_{kj}^n \nu_n^k \nu_n^i + \nu_n^i \nu_j^0) \omega_0^n + \nu_j^0 \omega_0^i,$$

определяет пространство $\overset{1}{A}_{n,m}$ с линейной связностью аффинного типа.

Аналогично, если распределение характеристик $\Pi_{n-m-1} = [A_0 A_v]$ распредления $\mathcal{H} \subset P_{n,n}$ оснащено в смысле А.П. Нордена полями квазитензоров ν_n^v, ν_v^0 (полем нормалей первого рода служит поле $[\Pi_m, A_n + \nu_n^v A_v$) то система форм $\{\overset{1}{\Theta}{}_u^v\}$, где

$$\overset{1}{\Theta}{}_0^v = \omega_0^v - \nu_n^v \omega_0^n,$$

$$\overset{1}{\Theta}{}_u^v = \omega_u^v - \delta_u^v (\omega_0^0 - \overset{1}{\Theta}{}_0^w \nu_w^0) - (M_{iu}^v - \Lambda_{iu}^n \nu_n^v) \omega_0^i - \qquad (10)$$

$$- \nu_n^v \omega_u^n - (\nu_{nu}^v - A_{wu}^n \nu_n^v \nu_n^w + \nu_n^v \nu_u^0) \omega_0^n + \nu_u^0 \omega_0^v,$$

также определяет пространство $\overset{1}{A}_{n,\,n-m-1}$ с линейной связностью аффинного типа.

Отметим, что в выражениях (9), (10) можно, например, взять внутренним образом определенные квазитензоры

$$\nu^i_n = \frac{1}{n-m-1} A^{uv}_n N^i_{vu}, \quad \nu^v_n = \frac{1}{m} M^v_{ij} \Lambda^{ji}_n, \tag{11}$$
$$\nu^0_i = -\frac{1}{n-m-1}\left(M^v_{iv} - \frac{1}{m}\Lambda^n_{iv} M^v_{sl} \Lambda^{ls}_n\right), \quad \nu^0_v = -\frac{1}{m} N^s_{vs}.$$

Так как каждая из систем функций

$$\bar\nu^i_n = -\Lambda^{ik}_n \nu^0_k, \quad \bar\nu^0_i = \Lambda^n_{ki} \nu^k_n, \tag{12}$$
$$\bar\nu^v_n = -A^{vu}_n \nu^0_u, \quad \bar\nu^0_v = A^n_{uv} \nu^u_n$$

есть квазитензор, двойственный соответствующему квазитензору относительно преобразования (3), то системы форм $\{\overset{2}{\Theta}{}^i_j\}$, $\{\overset{2}{\Theta}{}^v_u\}$ строения (9) и (10), где входящие в них формы и функции пишутся с черточкой сверху, определяют пространства $\overset{2}{A}_{n,m}$ и $\overset{2}{A}_{n,\,n-m-1}$ с линейной связностью аффинного типа, двойственные соответствующим пространствам $\overset{1}{A}_{n,m}$ и $\overset{1}{A}_{n,\,n-m-1}$.

Заметим, что можно строить двойственную теорию распределения $\mathcal{H} \subset P_{n,n}$ и при некоторых других его оснащениях, а именно: а/ при оснащении в смысле Э. Картана [10], б/ при касательном оснащении [4], определяемом заданной на нем m -тканью линий.

7. В работе [7] нами построены (без применения теории двойственности) различные внутренние инвариантные нормализации регулярного распределения $\mathcal{H} \subset P_n$ (они справедливы и в случае $\mathcal{H} \subset P_{n,n}$). Теперь, зная закон охвата объекта нормали первого (второго) рода ν^i_n (ν^0_i) распределения $\mathcal{H} \subset P_{n,n}$, с использованием его двойственной теории легко построить внутренним образом определенную нормаль второго (первого) рода ν^0_i (ν^i_n) следующим образом: построим охват квазитензора $\bar\nu^i_n$ $(\bar\nu^0_i)$ двойственного образа $\bar{\mathcal{H}} \subset \bar P_{n,n}$, аналогичный охвату ν^i_n $(\bar\nu^0_i)$, после чего по закону (12) найдем соответствующую нормаль ν^0_i (ν^i_n). В частности, в охватах (11) нормали ν^i_n и ν^0_i (а также ν^v_n и ν^0_v) именно в таком смысле являются двойственными друг по отношению к другу. Согласно работе [6], с распределением $\mathcal{M} \subset P_{n,n}$ m-мерных линейных элементов ($m < n-1$) во второй дифференциальной окрестности внутренним образом ассоциируется гиперплоскостное распределение $\mathcal{H} \subset P_{n,n}$, для которого исходное распределение $\mathcal{M}$ является базисным; уравнение гиперплоскости оснащающего распределения имеет вид $c_\alpha x^\alpha = 0$.

В случае $\det\| c_\alpha \Lambda^\alpha_{ij} \| \neq 0$ двойственную теорию гиперполосного распределения $\mathcal{H} \subset P_{n,n}$ можно приложить к изучению двойственной геометрии распределения $\mathcal{M} \subset P_{n,n}$; в частности, это позволяет: а/ построить новые внутренним образом определенные инвариантные нормализации распределения $\mathcal{M}$; б/ найти ряд двойственных линейных связностей (аффинного и проективного типов), определяемых на распределении $\mathcal{M}$, оснащенном в смысле А.П. Нордена или Э. Картана; в/ инвариантное присоединение регулярного распределения $\mathcal{H}$ к распределению $\mathcal{M} \subset P_{n,n}$ позволяет изучить двойственную геометрию m -тканей на $\mathcal{M}$.

Все это приводит к обогащению теории распределений m-мерных линейных элементов в $P_{n,n}$ новыми геометрическими фактами.

Список литературы

1. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. – Проблемы геометрии, Т.9. (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР), М., 1979.

2. К а р т а н Э. Пространства аффинной, проективной и конформной связности. – Изд-во Казанск. ун-та, 1962.

3. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. – Тр. Моск. матем. общ-ва, 1953, т.2, с.275-382.

4.М а л а х о в с к и й В.С. К геометрии касательно оснащенных подмногообразий.-Известия вузов.Матем., 1972,№9,с.54-65.

5.Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности, М., Наука,1976.

6.О с т и а н у Н.М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. II.-Тр.геометр.семинара,т.3.(ВИНИТИ АН СССР),М.,1971, с.95-114.

7.С т о л я р о в А.В.Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения -мерных линейных элементов.-Проблемы геометрии,т.7 (Итоги науки и техн.ВИНИТИ АН СССР).М.,1975,с.117-151.

8.С т о л я р о в А.В.Дифференциальная геометрия полос.-Проблемы геометрии.Т.10 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР),М.,1978,с.25-54.

9.Ч а к м а з я н А.В. Двойственная нормализация.- ДАН Арм.ССР,1959,т.28,№ 4,с.151-157.

10. Cartan E. Les espaces á connexion projective. -Тр.семинара по векторному и тензорному анализу,1937,4,147-159.

11. Cartan E. Leçons sur la théorie des espaces á connexion projective. Paris, 1937.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.13 1982

В.Н.Х у д е н к о

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ДВУМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ КОНИК В P_4

В четырехмерном проективном пространстве рассматриваются двумерные многообразия коник Q_1, инцидентных стационарной гиперквадрике Q (многообразия S).Доказано наличие четырех фокальных точек коники $Q_1 \in S$, найдена их геометрическая характеристика.

Отнесем многообразие S к реперу $R=\{A_1,\dots,A_5\}$, где A_1,A_2,A_3 инцидентны двумерной плоскости коники Q_1, а A_4,A_5 вне этой плоскости.

Уравнения квадрики Q и коники Q_1 запишем в виде:

$$a_{\mathcal{Y}\mathcal{K}}\, x^{\mathcal{Y}} x^{\mathcal{K}} = 0\,; \tag{1}$$

$$a_{\alpha\beta}\, x^{\alpha} x^{\beta} = 0\,,\quad x^4 = 0\,;\ x^5 = 0\,. \tag{2}$$

Пфаффова система уравнений многообразия S имеет вид:

$$\omega_i^4 = \Gamma_i^{4j}\omega_j\,,\quad \omega_3^4 = \Gamma_3^{4j}\omega_j\,,\quad \omega_3^5 = \Gamma_3^{5j}\omega_j\,,$$

$$d\,a_{\mathcal{Y}\mathcal{K}} - a_{\mathcal{Y}\mathcal{Z}}\,\omega_{\mathcal{K}}^{\mathcal{Z}} - a_{\mathcal{Z}\mathcal{K}}\,\omega_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{Z}} = 0\,, \tag{3}$$

$$(\omega_i \overset{def}{=} \omega_i^5)\,.$$

Здесь индексы принимают следующие значения:

$$\mathcal{Y},\mathcal{Z},\mathcal{K} = 1,2,\dots,5\,;\quad \alpha,\beta,\gamma = 1,2,3\,;\quad i,j,k = 1,2\,. \tag{4}$$

Рассмотрим фокальное многообразие коник $Q_1 \in S$ [2], из (1)-(3) получаем,что оно определяется системой алгебраических уравнений

$$a_{\alpha\beta}\, x^{\alpha} x^{\beta} = 0\,,\ x^4 = 0\,,\ x^5 = 0\,, \tag{5}$$